Institut für Physik
FB Theor. Physik
KFU Graz

M. Huber
W. Schweiger

Mathematische Methoden 5 — WS 07/08

15. Übungsblatt (zu rechnen bis zum 28.1.2008)

Aufgabe 60: V sei der 3-dimensionale Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2, der durch die Basiselemente $\{1, t, t^2\}$ aufgespannt wird. In diesem Vektorraum seien der **Differentiationsoperator** D und der **Translationsoperator** T_a folgendermaßen definiert:

$$Df(t) = \frac{d}{dt}f(t)\,, \qquad T_a f(t) = f(t+a)\,.$$

a) Wie sieht die Matrixdarstellung von D und T_a bezüglich der obigen Basis aus?
b) Zeigen Sie mit Hilfe der Matrixdarstellungen von D und T_a, dass

$$T_a = I + aD + \frac{a^2}{2}D^2\,.$$

Aufgabe 61: $L = d^2/dx^2$ sei ein Differentialoperator, der auf reelle quadratintegrierbare Funktionen $u(x)$ im Intervall $(0,1)$ wirkt, welche die Randbedingungen $du/dx|_{x=0} = u(1)$ und $du/dx|_{x=1} = 0$ erfüllen. Wie sieht der zu L bezüglich des Skalarproduktes $(v,u) = \int_0^1 dx\, v(x)u(x)$ formal adjungierte Differentialoperator $L^\dagger$ aus? Welche Randbedingungen müssen an die Funktionen $v(x)$, die im Definitionsbereich von $L^\dagger$ liegen, gestellt werden, damit die Randterme, die bei der Herleitung von $L^\dagger$ auftreten, verschwinden? Kann L zu einem selbstadjungierten Operator erweitert werden?

Aufgabe 62: Der Differentialoperator $T = -i\, d/dx$ wirke auf komplexe quadratintegrierbare Funktionen $f(x)$ im Intervall $(0,1)$ (mit Skalarprodukt $(g,f) = \int_0^1 dx g^*(x)f(x)$). Sein Definitionsbereich sei

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in L^2(0,1)|f \text{ stetig differenzierbar auf [0,1] und } f(0) = \alpha f(1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Welche Möglichkeiten gibt es für die Wahl von α, sodass T zu einem selbstadjungierten Operator erweitert werden kann.

Aufgabe 63: Die stationäre Wellenfunktion eines quantenmechanischen Teilchens (in 1 Raumdimension), welches zwischen zwei unendlich hohen Wänden, die sich an den Stellen $-\pi/2$ und $\pi/2$ befinden, eingesperrt ist, wird durch die Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\,\psi(x) \quad \text{mit Randbedingungen} \quad \psi(-\pi/2) = \psi(\pi/2) = 0$$

($m > 0\ldots$ Teilchenmasse, $\hbar\ldots$ Planck'sches Wirkungsquant) beschrieben. Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung für $E \geq 0$. Welche Einschränkungen ergeben sich aus den Randbedingungen für $\Psi(x)$ und E?