

## Mathematische Methoden 5

WS 07/08

### 1. Übungsblatt (zu rechnen bis zum 1.10.2007)

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie mit einer der Ihnen bekannten Methoden, dass folgende Vektoren linear unabhängig voneinander sind:

- a)  $(\pi, 0)^T$  und  $(0, 1)^T$ ,      b)  $(1, 1, 1)^T$  und  $(0, 1, -2)^T$ ,  
c)  $(0, 1, 1)^T$ ,  $(0, 2, 1)^T$  und  $(1, 5, 3)^T$ .

**Aufgabe 2:** Zeigen Sie mit einer der Ihnen bekannten Methoden, dass folgende Funktionen linear unabhängig voneinander sind:

- a)  $t$  und  $t^2$ ,      b)  $t$  und  $\sin t$ ,  
c)  $1$ ,  $\cos t$  und  $\cos 2t$ .

**Aufgabe 3:** Drücken Sie den Vektor  $\vec{x}$  als Linearkombination der beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aus.

- a)  $\vec{x} = (2, 1)^T$ ,  $\vec{a} = (1, -1)^T$ ,  $\vec{b} = (1, 1)^T$ ;  
b)  $\vec{x} = (4, 3)^T$ ,  $\vec{a} = (2, 1)^T$ ,  $\vec{b} = (-1, 0)^T$ ;

### Aufgabe 4:

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig voneinander sind und somit eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  darstellen.

- b) Das bedeutet insbesondere, dass sich jeder Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{v}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , darstellen lässt. Es sei nun

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \tilde{x}_1 \vec{v}_1 + \tilde{x}_2 \vec{v}_2 + \tilde{x}_3 \vec{v}_3,$$

wobei  $\vec{e}_i$  die üblichen kartesischen Basisvektoren sind (d.h.  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ ). Wie hängen die Koordinaten  $\tilde{x}_i$  bzgl. der  $v$ -Basis mit den üblichen kartesischen Koordinaten  $x_i$  (bzgl. der  $e$ -Basis) zusammen?

- c) Finden Sie eine Matrix  $\hat{A}$ , die diesen Zusammenhang beschreibt, d.h. mit deren Hilfe man

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

schreiben kann.

- d) Die kartesischen Koordinaten  $x_i$  eines Vektors  $\vec{x}$  seien nun  $(1, 0, 0)^T$ . Wie lauten seine Koordinaten  $\tilde{x}_i$  bzgl. der  $v$ -Basis?

**Aufgabe 5:** Zeigen Sie, dass  $f_0(t) = 1$ ,  $f_1(t) = \cos t$ ,  $f_2(t) = \cos 2t$  und  $g(t) = \cos^2 t$  **nicht** linear unabhängig voneinander sind. Wenn Sie  $g(t)$  in der Form

$$g(t) = c_0 f_0(t) + c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

schreiben, wie lauten dann die Koeffizienten  $c_i$ ?