55.)

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + v_3 - v_4 \\ 3v_1 + 3v_2 + 5v_3 + 3v_4 \\ v_1 + v_2 + 3v_3 + 5v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 4$$

$$v_3 + 3v_4 = -3 \qquad \text{(nicht l.u. Glchgn.)}$$

2 l.u. Lsgn. der homogenen Gleichung sind

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 Lsg. der inh. Glchg. ist $\quad \tilde{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allg. Lsg.:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Allgemeines Element aus V:

$$f = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = \alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} + \gamma t^2 e^{-2t}$$

Komponentendarst. von f: $\quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$D f(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt}\left(\alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} + \gamma t^2 e^{-2t}\right)$$

$$= -2\alpha e^{-2t} + \beta e^{-2t} - 2\beta t e^{-2t} + 2\gamma t e^{-2t} - 2\gamma t^2 e^{-2t} .$$

$$= (-2\alpha + \beta) e^{-2t} + (-2\beta + 2\gamma) t e^{-2t} - 2\gamma t^2 e^{-2t}$$

$$= (-2\alpha + \beta) w_1 + (-2\beta + 2\gamma) w_2 - 2\gamma w_3$$

Komponentendarstellung von $D f$:

$$\dot{\vec{f}} = \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta \\ -2\beta + 2\gamma \\ -2\gamma \end{pmatrix}$$

a) Matrixdarstellung von D:

$$\hat{D} \vec{f} = \dot{\vec{f}} = \hat{D} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta \\ -2\beta + 2\gamma \\ -2\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{D} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$\hat{D}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\hat{D}^2 + 4\hat{D} + 4}} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{f(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}}} \quad \text{allg. Lsg.}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = c_1 ,\ x_2 = c_2 ,\ x_3 = \frac{1}{2}}}$$